PART3　さまざまな数列の和

3　[1]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の和を求めよ。

[2]　次の数列の和を求めよ。

$$1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$$

Point Pickup

[1]　部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\qquad \frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

[2]　一般項が（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，等比数列の公比 r を用いて $S-rS$ を計算することで求めることができる。

第2講　PART3　確認問題

1　次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{n(n+\boxed{ア})}{\boxed{イウ}(\boxed{エ}n+\boxed{オ})(\boxed{カ}n+\boxed{キ})}$$

（ただし，$\boxed{オ}<\boxed{キ}$ とする）

2　次の数列の和を求めよ。

$$3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^{n-1}$$

$$=(\boxed{ク}n-\boxed{ケ})\cdot2^{\boxed{コ}}+\boxed{サ}$$

[$\boxed{コ}$ の選択肢]

①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$2n$

PART3　さまざまな数列の和

3　[1]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の和を求めよ。

[2]　次の数列の和を求めよ。

$$1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$$

[1]　$\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

[2]　$\displaystyle S=1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$　……①　とおくと

$\displaystyle\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-5}{2^{n-1}}+\frac{3n-2}{2^n}$　……②

①－②より

$$\frac{1}{2}S=1+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{2^n}$$

$$=1+3\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n-2}{2^n}=4-\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{3n-2}{2^n}=4-\frac{3n+4}{2^n}$$

よって，求める和は

$$S=8-\frac{3n+4}{2^{n-1}}$$

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イウ：15，エ：2，オ：3，カ：2，
キ：5

[解説]

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right\}$$ [A]

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}\right)+\left(\frac{1}{7\cdot9}-\frac{1}{9\cdot11}\right)\right.$$

$$+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$\left.+\left\{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+3)(2n+5)-15}{15(2n+3)(2n+5)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n+4)}{15(2n+3)(2n+5)}}$$

[A]　部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

2 **[正解]** ク：2，ケ：1，コ：①，サ：1

[解説]

求める和を S とおくと

$$S=3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^{n-1}$$

$$2S=\quad 3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}+(2n+1)\cdot2^n$$

[B]

辺々の差をとると

$$-S=3+2\left(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=3+2\cdot\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=3+2\cdot2^n-4-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=-(2n-1)\cdot2^n-1$$

よって，求める和は

$$\boldsymbol{S=(2n-1)\cdot2^n+1}$$

[B]　一般項が
（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，
等比数列の公比 r を用いて，$S-rS$ を計算すると求めることができる。